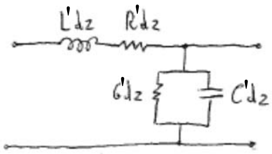
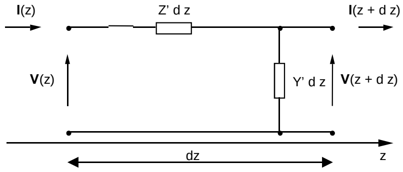
Teoria delle Linee di trasmissione
(esempi cavo coassiale)





C' = Capacità parallela per unità di lunghezza (F/m)
L' = Induttanza serie per unità di lunghezza (H/m)
G' = Conduttanza parallela per unità di lunghezza (S/m)
R' = Resistenza serie per unità di lunghezza (Ω/m)
Z ' = R' + jω L ' Impedenza per unità di lunghezza (Ω/m)
Y ' = G' + jω C ' Ammettenza per unità di lunghezza (S/m)

$$C' = \frac{\mathbf{Q}'}{\mathbf{V}_0} = \frac{2\pi\varepsilon'}{\ln\frac{b}{a}} \qquad L' = \frac{\boldsymbol{\Psi}'}{\mathbf{I}_0} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

Teoria delle Linee di trasmissione
(esempi cavo coassiale)

$$G' = \frac{I'_c}{V_0} = \frac{2\pi\sigma_D}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi\omega\varepsilon''}{\ln\frac{b}{a}} = \omega C' \tan\delta = \qquad \tan\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$$

σ_D = conducibilità del dielettrico

$$\frac{1}{2}R' I_0^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_{l_1+l_2} \underline{E}_t \times \underline{H}_t^* \bullet n_0 \, dl = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\eta)\oint_{l_1+l_2} \left|\underline{H}_t\right|^2 dl = \frac{R_S}{2}\oint_{l_1+l_2} \left|\underline{H}_t\right|^2 dl$$

$$R' = R_s \frac{\oint_{l_1+l_2} \left|\underline{h}_t(r,\theta)\right|^2 dl}{\left|\oint_{l_1} \left|\underline{h}_t(r,\theta)\right| dl\right|^2} = \frac{R_s}{2\pi}\frac{b+a}{ab}$$

σ_C = conducibilità del metallo $\qquad R_S = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\sigma_C}}$

Equazioni dei telegrafisti

$$\frac{d\mathbf{V}(z)}{dz} = -Z'\,\mathbf{I}(z) \qquad \frac{d\mathbf{I}(z)}{dz} = -Y'\,\mathbf{V}(z)$$

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{V}^{+}e^{-\gamma z} + \mathbf{V}^{-}e^{+\gamma z}$$

Onda diretta e riflessa di tensione

$$\mathbf{I}(z) = \left(\frac{1}{Z_0}\right)\left(\mathbf{V}^{+}e^{-\gamma z} - \mathbf{V}^{-}e^{+\gamma z}\right)$$

Onda diretta e riflessa di corrente

Parametri secondari della linea

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z'Y'} = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')}}$$

Costante di propagazione (attenuazione e fase)

$$\boxed{Z_0 = Z_{0r} + jZ_{0j} = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}}}$$

Impedenza caratteristica

Cavo Coassiale

basse perdite $\qquad \gamma \approx \frac{1}{2}\left(\frac{R'}{Z_0} + G'Z_0\right) + j\omega\sqrt{L'C'}$

$$\boxed{\alpha \approx \frac{1}{2}\frac{R'}{Z_0} = \frac{1}{2}\frac{\frac{R_S}{2\pi}\frac{b+a}{ab}}{Z_0} = \frac{1}{4\pi}\frac{b+a}{ab}\frac{1}{Z_0}\sqrt{\frac{\mu}{2\sigma_C}}\sqrt{\omega} = \alpha'\sqrt{\omega}}$$

$$\boxed{\beta \approx \omega\sqrt{L'C'} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\ 10^8}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ m/s \qquad \text{(velocità di fase)}}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{f\ \lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Cavo Coassiale

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\, ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \Omega}$$

Valore tipico per cavi e microstrisce $Z_0 = 50\Omega$

$$\boxed{A_{dB} = 10\log\frac{P_{IN}}{P_{OUT}} = 10\log\frac{P_{IN}}{P_{IN}e^{-2\alpha l}} = 8.686\alpha l \text{ [dB]} \qquad \text{attenuazione}}$$

per $l = 1\text{m}$ $\qquad A_{dB/m} = 8.686\,\alpha \quad [\text{dB/m}]$

$$Z(z) = \frac{\mathbf{V}(z)}{\mathbf{I}(z)} = Z_0\frac{\mathbf{V}^+e^{-\gamma z} + \mathbf{V}^-e^{+\gamma z}}{\mathbf{V}^+e^{-\gamma z} - \mathbf{V}^-e^{+\gamma z}}$$

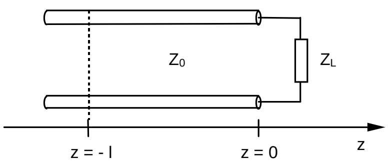
Impedenza lungo la linea

$$\Gamma(z) = \frac{\mathbf{V}^-e^{+\gamma z}}{\mathbf{V}^+e^{-\gamma z}} = \frac{\mathbf{V}^-}{\mathbf{V}^+}e^{2\gamma z}$$

coefficiente di riflessione lungo la linea

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0}} \qquad \boxed{Z(z) = Z_0\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}}$$

Linee di trasmissione chiuse su carichi



$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \rho e^{j\varphi}$$

$$Z_L = Z_0 \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L} = R_L + jX_L$$

con perdite

$$\boxed{Z(-l) = Z_0 \frac{Z_L \cosh(\gamma l) + Z_0 \operatorname{senh}(\gamma l)}{Z_0 \cosh(\gamma l) + Z_L \operatorname{senh}(\gamma l)}}$$

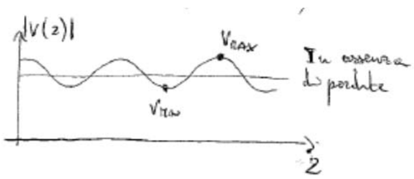
assenza di perdite

$$\boxed{Z(-l) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta l) + jZ_0 \operatorname{sen}(\beta l)}{Z_0 \cos(\beta l) + jZ_L \operatorname{sen}(\beta l)}}$$

$$\boxed{\Gamma(-l) = \Gamma_L e^{-2\gamma l} = \rho e^{+j\varphi - 2\alpha l - 2j\beta l}}$$

Per una linea «lunga» con perdite risulta $\Gamma(-l) = 0$

ROS e vari casi



rapporto d'onda stazionaria
(ROS o SWR)

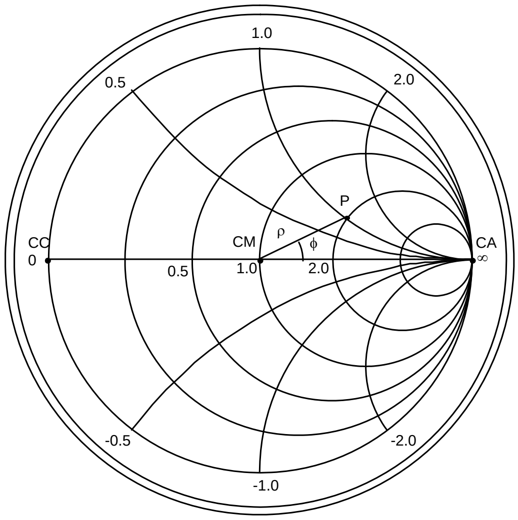
$$SWR = \frac{V_{MAX}}{V_{MIN}} = \frac{1+\rho}{1-\rho} \qquad \rho = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$$

Carico adattato $Z_L = Z_0$ $\rho = 0$ SWR = 1

Corto circuito $Z_L = 0$ $\rho = 1$ $SWR = \infty$

Circuito aperto $Z_L = \infty$ $\rho = 1$ $SWR = \infty$

Carta di Smith



APPENDICE

$\boxed{\text{Definizione di } \epsilon', \epsilon'', tan(\delta)}$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega\epsilon\underline{E} + \sigma\underline{E} = j\omega\left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\underline{E}$$

$$= j\omega\left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\underline{E} = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\underline{E}$$

$$\begin{cases} \epsilon' = \epsilon_0\epsilon_R \\ \epsilon'' = \dfrac{\sigma}{\omega} \Rightarrow \sigma = \omega\epsilon'' \\ \epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' \\ tan(\delta) = \dfrac{\epsilon''}{\epsilon'} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Definizione di } R_S}$

Impedenza d'onda $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon' + \sigma_m}}$

In mezzi buoni conduttori $\sigma_m \gg \omega\epsilon'$ e quindi:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma_m}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_m}} = (1+j)\cdot R_S$$

quindi

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_m}}$$

N.B. la conducibilità σ spesso è indicata con g.

APPENDICE

Costante di propagazione γ per basse perdite

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')\cdot(G' + j\omega C')}$$

$$= \sqrt{R'G' + j\omega L'G' + j\omega C'R' - \omega^2 L'C'}$$

$$= j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{1 + \frac{(R'G' + j\omega L'G' + j\omega C'R')}{j\omega L'\cdot j\omega C'}}$$

$$= j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{j\omega L'G' + j\omega C'R'}{j\omega L'\cdot j\omega C'}}$$

$$= j\omega\sqrt{L'C'}\left(1 + \frac{1}{2j}\cdot\left(\frac{G'}{\omega C'} + \frac{R'}{\omega L'}\right)\right)$$

$$= j\omega\sqrt{L'C'} + \frac{j\omega\sqrt{L'C'}}{2j}\cdot\left(\frac{G'}{\omega C'} + \frac{R'}{\omega L'}\right)$$

$$= j\omega\sqrt{L'C'} + \frac{1}{2}G'\sqrt{\frac{L'}{C'}} + \frac{1}{2}R'\sqrt{\frac{C'}{L'}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}G'Z_0 + \frac{1}{2}\frac{R'}{Z_0}\right) + j\omega\sqrt{L'C'} = \alpha + j\beta$$